$\boxed{1}$

(i) $h'(x) = 9x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$ なので $h(x)$ は増加関数. $x > 0$ の範囲で方程式 $h(x) = 0$ の解は $x = 1$ に限る.

(ii) 略

(iii) $e^{(\pi^n)} > \pi^{(e^n)}$

(iv) $x = 1$

(v)

$$g(1) = \begin{cases} -\dfrac{7}{4} & (n = 1) \\ \dfrac{ne^{1-n} - 1}{(n-1)^2} - \dfrac{5}{4} & (n > 1). \end{cases}$$

$\boxed{2}$

(i) $a = \sqrt{1-t^2}$, $b = t$

(ii) $\mathrm{P}\,(t^2,\ \ t^2)$

(iii) $t = \dfrac{1}{2}$

(iv) $\beta = \dfrac{5}{6}\pi$

(v) $S = \dfrac{9-\sqrt{3}\pi}{12}$

$\boxed{3}$

(i) $z^9 = 1,\ z^3 + \overline{z}^3 = -1$

(ii)

$$8\cos^3\frac{2k\pi}{9} - 6\cos\frac{2k\pi}{9} + 1 = \begin{cases} 0 & (k = 1, 2, 4), \\ 3 & (k = 3). \end{cases}$$

(iii)

$$\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9} = 0, \quad \cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{8}$$

(iv) $\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ が有理数であったと仮定して矛盾を導く.

(v) (ii),(iv) から $f(x) = 8x^3-6x+1$ は有理数解を持たない. $\cos\dfrac{2\pi}{9}$ が $ax^2+bx+c=0$ の解であったとして矛盾を導く.

$\boxed{4}$

(i) $a_3 = 3,\ b_3 = 2,\ a_4 = 5,\ b_4 = 3$

(ii) $a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = a_n$

(iii) $n = 12$

(iv) 前半は略. 後半は数学的帰納法と前半の結果を用いて証明する.

(v) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. $\displaystyle\lim_{m\to\infty} r_m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.